



# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a V – a

**1. FELADAT** Egy matematikaversenyen 30 feladatot adnak. Minden helyesen megoldott feladatra a tanuló 10 pontot kap, minden hibásan megoldott feladat esetében 10 ponttal büntetik (levonnak 10 pontot). Dragoș minden feladatra adott egy megoldást, így 80 pontot kapott.

- Hány feladatot oldott meg helyesen Dragoș?
- Hány feladatot oldott meg hibásan Dragoș?
- Hány feladatot kellett volna még megoldjon helyesen Dragoș, hogy a végén 120 pontot érjen el?
- Mennyi volt a maximális pontszám, amit ezen a matematikaversenyen el lehetett érni?

**2. FELADAT** Legyen  $x = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2014}$  és  $y = (27^3 : 3^8 + 10^{10} : 10^8 - 72)^{403} - 2015^0$ .

- Mutassátok ki, hogy  $x = 2^{2015} - 1$ ;
- Hasonlítsátok össze az  $x$  és  $y$  számokat;
- Határozzátok meg az  $x + y$  utolsó számjegyét.

**3. FELADAT** Határozzátok meg, hány  $\overline{abc}$  alakú különböző számjegyekből álló szám van, amelyekre igaz, hogy:

$$\overline{aba} - \overline{aaa} + 17(b - a) = c^3.$$

**4. FELADAT** Tekintsük a következő számsort: 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 20, ...

- Írjátok fel a sorozat következő 2 tagját;
- Keressétek meg a sorozat 2015-ik tagját;
- Számítsátok ki a sorozat azon tagjainak összegét, amelyek kisebbek vagy egyenlőek mint 80.

<sup>1</sup>Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;

<sup>2</sup>Toate problemele sunt obligatorii;

<sup>3</sup>Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.



# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a VI – a

**1. FELADAT** a) Határozzátok meg az  $x$  szám értékét tudva, hogy

$$\frac{2014}{2015 \cdot 2015 - 2015 - 2015 + 1} = \frac{x}{2014 \cdot 2015}.$$

b) Az  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{4}{a+b}$  egyenlőtlenséget felhasználva, ahol  $a$  és  $b$  két különböző pozitív szám, igazoljátok, hogy

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{499} + \frac{1}{500} > \frac{13}{7}.$$

**2. FELADAT** Adottak az  $a = 3n + 7$ ,  $b = 2n + 5$  és  $c = n + 2$  természetes számok, ahol  $n \in \mathbb{N}$ . Igazoljátok, hogy  $a$  és  $b$  relatív primek és  $[a, b] + [a, c]$  teljes négyzet. ( $[x, y]$  jelöli az  $x$  és  $y$  legkisebb közös többszörösét)

**3. FELADAT** Adottak az  $A, O$  és  $B$  kollineáris pontok, ahol  $O \in (AB)$ . Az  $AB$  egyenes ugyanazon oldalán felvesszük a  $C$  és  $D$  pontokat úgy, hogy  $\widehat{AOC}$  és  $\widehat{COD}$  egymásmelletti szögek legyenek.  $[OM]$  az  $\widehat{AOC}$  szög szögfelezője,  $[ON]$  pedig a  $\widehat{BOD}$  szög szögfelezője. Tudjuk, hogy  $\widehat{MOD} = 105^\circ$  és  $\widehat{NOC} = 120^\circ$ .

a) Igazoljátok, hogy  $\widehat{COD}$  derékszög.

b) Ha a  $\widehat{COD}$  szög belső tartományában 12 darab különböző,  $O$  kezdőpontú félegyenest szerkesztünk úgy, hogy a keletkezett 13, párosával diszjunkt, szög mértéke zérótól különböző természetes szám, akkor bizonyítsátok be, hogy ezen szögek között létezik legalább két kongruens szög.

**4. FELADAT** a) Adottak az  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{2015}$  kollineáris pontok (ebben a sorrendben) úgy, hogy  $A_0A_1 = 1$  cm,  $A_1A_2 = 2$  cm, ...,  $A_{2014}A_{2015} = 2015$  cm. Számítsátok ki az  $A_{1000}$  és  $A_{2015}$  pontok közötti távolságot.

b) Adott az  $A, B, C, D, E$  és  $F$  hat pont úgy, hogy közülük bármely három nem kollineáris. A pontok által meghatározott szakaszok mindegyikét kiszínezzük véletlenszerűen vagy narancssárgával vagy lilával. Igazoljátok, hogy létezik egy olyan háromszög, melynek csúcsai az adott hat pont közül vannak és minden oldala ugyanolyan színű.

<sup>1</sup>Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;

<sup>2</sup>Toate problemele sunt obligatorii;

<sup>3</sup>Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.



# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a VII – a

**1. Feladat** a) Igazoljátok, hogy az  $A = \sqrt{2015^n + (-1)^{n+1} \cdot 2}$  szám irracionális, bármely  $n \in \mathbb{N}^*$  esetén.

b) Bizonyítsátok be, hogy ha  $x, y$  és  $z$  pozitív valós számok úgy, hogy  $x + y + z = 1344$ , akkor

$$\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(x+z)} + \sqrt{z(x+y)} \leq 2016.$$

**2. Feladat** a) Mutassátok ki, hogy  $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$ , bármely  $x \in \mathbb{R}$  esetén;

b) Határozzátok meg az  $a, b$  természetes számokat és a  $p$  prím számot, ha tudjuk, hogy

$$a^2 + a = p^{2^b} + 2.$$

**3. Feladat** Az ABCD paralelogrammában  $AB = n \cdot AD$ ,  $n \in \mathbb{R}$ ,  $n > 2$ . A paralelogramma szögfelezői a következő képpen metszik egymást: az  $A$  szög szögfelezője metszi a  $B$  szög szögfelezőjét az  $R$  pontban, a  $B$  szög szögfelezője metszi a  $C$  szög szögfelezőjét az  $S$  pontban, a  $C$  szög szögfelezője a  $D$  szög szögfelezőjét  $T$  pontban és a  $D$  szög szögfelezője az  $A$  szög szögfelezőjét a  $Q$  pontban.

a) Bizonyítsátok be, hogy  $RSTQ$  téglalap;

b) Ha  $AB \cap DT = \{P\}$ , bizonyítsátok be, hogy  $\frac{A_{ADP}}{A_{ARB}} = \frac{2}{n^2}$ ;

c) Igazoljátok, hogy az  $RT$ ,  $AC$  és  $DB$  összefutó egyenesek.

**4. Feladat** Adott az  $A$ -ban derékszögű  $ABC$  háromszög és a  $[BD]$ ,  $[CE]$  szögfelezők ( $D \in AC$ ,  $E \in AB$ ). Jelöljük  $I$ -vel a  $BD$  és  $CE$  egyenesek metszéspontját, illetve  $F$ -el, valamint  $G$ -vel, a  $D$  és  $E$  pontok vetületét a  $BC$  egyenesre. Számítsátok ki az  $FIG$  szög mértékét.

<sup>1</sup>Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

<sup>2</sup>Toate problemele sunt obligatorii;

<sup>3</sup>Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.



# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a VIII – a

**1. FELADAT** a) Bontsátok tényezőkre:  $3x^2 + 4\sqrt{6}x + 8 - y^2$ .

b) Keressétek meg a

$$\frac{x+1}{|x+1|} + \frac{|x+2|}{x+2} + \frac{x+3}{|x+3|}$$

kifejezés minimumát és maximumát, ha  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1\}$ .

**2. FELADAT** Legyenek  $a, b \in \mathbb{N}$ , úgy, hogy  $\sqrt{\frac{a+5}{a+12}}, \sqrt{\frac{b+3}{b+14}} \in \mathbb{Q}$ . Mutassátok ki, hogy  $a^{2015} + b^{2015}$  nem osztható 2015-el.

**3. FELADAT** Adott az  $ABCD$  négyzet és a síkján kívül egy  $S$  pont úgy, hogy  $SA = SB = SC = SD$ . Ha  $AB = 12$  cm,  $AP \perp CS$ ,  $P \in (SC)$  és  $AP = SO$ , ahol  $O$  a négyzet középpontja, számítsátok ki:

- Az  $SC$  és  $BD$  egyenesek által bezárt szög mértékét;
- Az  $A$  pontnak a  $(BPD)$  síktól való távolságát;
- A  $B$  pontnak a  $(BPD)$  és  $(ADS)$  síkok metszésvonalától való távolságát.

**4. FELADAT** Adottak az  $A, B, C$  és  $D$  nem koplanáris pontok. Ha  $H$  az  $ABC$  háromszög ortocentruma,  $D$  a  $BCD$  háromszög ortocentruma, valamint  $D$  és  $A$  pontokból a  $BC$ -re emelt merőlegesek talppontjai egybeesnek,  $E$ -vel jelölve ezt az  $A$ -ból a  $BC$ -re emelt merőleges talppontját, mutassátok ki, hogy  $HE \cdot AE = DE^2$ .

<sup>1</sup>Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

<sup>2</sup>Toate problemele sunt obligatorii;

<sup>3</sup>Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.